BÜTÜNLEME

MAT301 DİFERANSİYEL GEOMETRİ I DERSİ ~~FİNAL~~ SINAVI SORULARI

20.01.2020

SORU1: Boşlukları tamamlayınız:

A afin uzayının eşleştiği vektör uzayı .... uzayı ise A ya Öklid Uzayı denir.

Her noktaya tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona.......................denir.

Tanjant uzayın dual uzayına ....uzay denir.

Bir $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin hız vektörü .... dır.

Bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinin ve asli normalinin oluşturduğu düzleme ....düzlem denir. **(25 puan)**

SORU2: $\vec{v}=(1,2),\ \vec{u}=(3,4)\in IR^2$ ve $P\in E^2$ için $\overrightarrow{v_p}-3\overrightarrow{u_p}$ tanjant vektörünü hesaplayınız. **(10 puan)**

SORU3: $f,g\in C(E^n,IR),\ a,b\in IR$ ve $\forall \overrightarrow{v_p}\in T_{E^n}(P)$ için $\overrightarrow{v_p}(af+bg)=a\overrightarrow{v_p}(f)+b\overrightarrow{v_p}(g)$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**

SORU4: $X=x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+x_2^2x_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}\in\chi(E^3)$ için $div(X)=?$ **(10 puan)**

SORU5: $F:E^2\to E^2;\ \ F(x_1,x_2)=(x_1^2-x_2^2,\ 2x_1x_2)$ dönüşümünün $P=(1,2)$ noktasındaki Jakobien matrisini bulunuz. **(10 puan)**

SORU6: $\alpha(t)=(t,1+t,t^2)$ eğrisinin $\alpha(1)$ noktasındaki birim teğet vektörünü bulunuz. **(10 puan)**

SORU7: $\alpha(1)=(1,-1,1)$ noktasındaki teğet vektörü $T(1)=(3,-2,2)$ olan eğrinin $\alpha(1)$ deki normal düzleminin denklemini bulunuz **(15 puan)**

SORU8: E^3 de bir M eğrisinin parametresi yay parametresi olsun. Eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart eğriliğinin sıfır ($\kappa=0$) olmasıdır. Gösteriniz **(15 puan)**

SORU9: E^3 de verilen bir eğrinin eğrilik ve burulması ne ifade eder? **(10 puan)**

Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Emin KASAP

CEVAP ANAHTARI

1)

* A afin uzayının eşleştiği vektör uzayı iç çarpım uzayı ise A'ya Öklid uzayı denir.
* Her noktaya tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona vektör alanı denir.
* Tanjant uzayın dual uzayına kotanjant uzay denir.
* Bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin hız vektörü $\alpha'(s)$ dir.
* Bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinin ve asli normalinin oluşturduğu düzleme oskülatör düzlem denir.

---

2) $\vec{v} = (1,2)$, $\vec{w} = (3,4)$, $P \in E^2$ için $\vec{v}_P - 3\vec{w}_P = ?$

$$\vec{v}_P - 3\vec{w}_P = \vec{v}_P + (-3)\vec{w}_P = (P, \vec{v}) + (-3)(P, \vec{w})$$
$$= (P, \vec{v} - 3\vec{w})$$
$$= (\vec{v} - 3\vec{w})_P$$
$$= \left((1,2) - 3(3,4)\right)_P$$
$$= (-8, -10)_P$$

---

3) $$\vec{v}_P[af + bg] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial(af+bg)}{\partial x_i}\Big|_P$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \left(a \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P + b \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_P \right)$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P + b \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_P$$
$$= a\vec{v}_P[f] + b\vec{v}_P[g]$$

---

4) $X = \overset{f_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \underbrace{x_2^2 x_3}_{f_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \overset{f_3}{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$ için $\operatorname{div}(X) = ?$

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1 + 2x_2x_3 + 1 = 2 + 2x_2x_3$$

5) $F(x_1, x_2) = (\underbrace{x_1^2 - x_2^2}_{f_1}, \underbrace{2x_1x_2}_{f_2})$, $P=(1,2)$ için $J(F,P) = ?$

$$J(F,P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 2p_1 & -2p_2 \\ 2p_2 & 2p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

---

6) $\alpha(t) = (t, 1+t, t^2)$

$$\alpha'(t) = (1, 1, 2t) \Rightarrow \alpha'(1) = (1,1,2)$$

$$T(1) = \frac{\alpha'(1)}{\|\alpha'(1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

---

7) $\alpha(1) = (1,-1,1)$, $T(1) = (3,-2,2)$

Normal düzlemin normali $T(1)$ dir.

$$\Rightarrow 3x - 2y + 2z + d = 0$$

$\alpha(1)$ den geçeceğinden

$$2+2+2+d = 0 \Rightarrow d = -6$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 2z - 6 = 0$$

---

8) $(\Rightarrow)$ M eğrisi bir doğru olsun. O halde $\alpha(s) = As+B$ şeklindedir.

$\Rightarrow \alpha'(s) = A \Rightarrow T(s) = A \Rightarrow T'(s) = 0 = \kappa N$

$\Rightarrow \kappa = 0$

$(\Leftarrow)$ $\kappa = 0$ olsun.

$\Rightarrow T'(s) = \kappa N = 0$

$\Rightarrow T(s) = A = \text{sabit}$

$\Rightarrow \alpha'(s) = A = \text{sabit}$

$\Rightarrow \alpha(s) = As+B$

$\Rightarrow \alpha$, bir doğrudur.

---

9) Eğrinin eğriliği doğrudan sapma miktarıdır. Eğrilik ne kadar büyükse eğri o kadar çok eğrilmiş demektir. Eğrinin burulması ise düzlemden ne kadar saptığının ölçüsüdür. Burulması sıfır ise eğri düzlemseldir.